Рівняння синус Ґордон (СҐ–рівняння)

СҐ–рівняння: $u_{tt} - u_{xx} = \sin u$

Симетрії

- Просторова трансляція $x \to x' = x - X$
- Часова трансляція $t \to t' = t - T$
- Перетворення Лоренца: $x \to x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2}}$, $t \to t' = \frac{t - xv}{\sqrt{1-v^2}}$

Інтеґрали руху

Нескінчена кількість інтеґралів руху

- Енергія $H = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{u_t^2}{2} + \frac{u_x^2}{2} + 1 - \cos u \right) \mathrm{d}x$
- Імпульс $P = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_t u_x \mathrm{d}x$
- Топологічний заряд $Q = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_x \mathrm{d}x$

Двосолітонні розв'язки

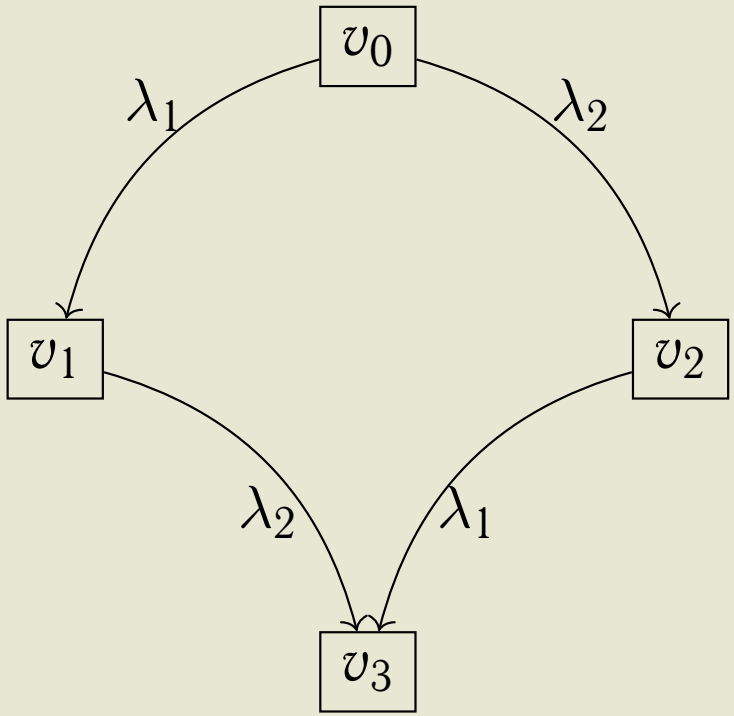
Низка перетворень

- v_0 — тривіальний розв'язок
- v_1, v_2 — односолітонні розв'язки
- v_3 — двосолітонний розв'язок

Перетворення Беклунда

$$\begin{cases} \dfrac{u_x - v_x}{2} = -\lambda \sin \dfrac{u+v}{2} \\ \dfrac{u_t + v_t}{2} = -\dfrac{1}{\lambda} \sin \dfrac{u-v}{2} \end{cases}$$

Схема побудови двосолітонного розв'язку

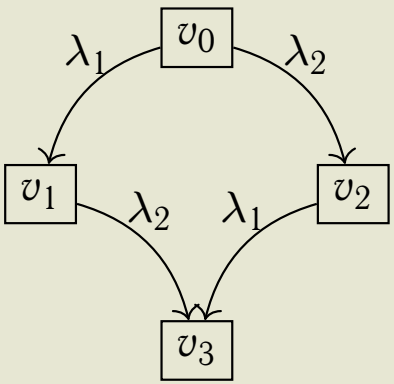


Двосолітонні розв'язки

Перетворення Беклунда

$$\begin{cases} \dfrac{u_x - v_x}{2} = -\lambda \sin \dfrac{u+v}{2} \\ \dfrac{u_t + v_t}{2} = -\dfrac{1}{\lambda} \sin \dfrac{u-v}{2} \end{cases}$$

Схема



$N = 1$

$$\begin{cases} N = 0 & u = v_0 = 0 \\ N = 1 & v_1(\lambda_1), v_2(\lambda_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{v_1}{2}\right)_x = \lambda_1 \sin \dfrac{v_1}{2} \\ \left(\dfrac{v_2}{2}\right)_x = \lambda_2 \sin \dfrac{v_2}{2} \end{cases}$$

$N = 2$

$$\begin{cases} N = 1 & v_1(\lambda_1), v_2(\lambda_2) \\ N = 2 & u = v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{v_3 - v_1}{2}\right)_x = \lambda_2 \sin \dfrac{v_3 + v_1}{2} \\ \left(\dfrac{v_3 - v_2}{2}\right)_x = \lambda_1 \sin \dfrac{v_3 + v_2}{2} \end{cases}$$

Двосолітонний розв'язок

$$\operatorname{tg} \frac{v_3}{2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \operatorname{tg} \frac{v_2 - v_1}{2}$$

Двосолітонний розв'язок: кінк–антикінк

Двосолітонний розв'язок

$$\operatorname{tg}\frac{v_3}{2}=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\operatorname{tg}\frac{v_2-v_1}{2},\quad \operatorname{tg}\frac{v_j}{4}=e^{\theta_j},\ \theta_j=\frac{\lambda_j x}{2}+\frac{t}{2\lambda_j}+\delta_j,\ j=1,2$$

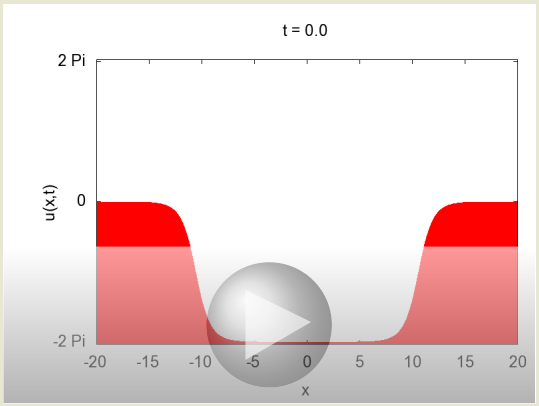
$$u(x,t)=v_3=4\operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda_2+\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\cdot\frac{e^{\theta_1}-e^{\theta_2}}{1+e^{\theta_1+\theta_2}}\right).$$

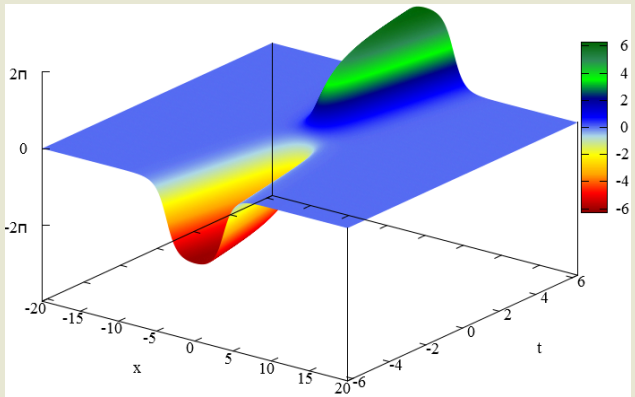
Двійка кінк–антикінк

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \delta_1,\ \delta_2,\ \in\mathbb{R},$$

$$v=\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2+\lambda_1}$$

$$\operatorname{tg}\frac{u}{4}=\frac{\operatorname{sh}\frac{vt}{\sqrt{1-v^2}}}{v\operatorname{ch}\frac{x}{\sqrt{1-v^2}}}$$





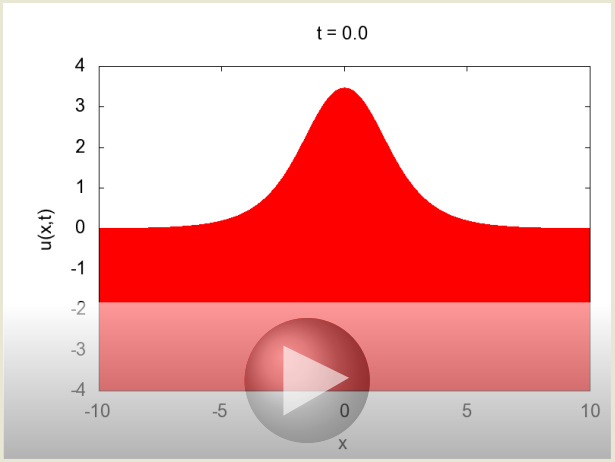
Двосолітонний розв'язок: брізер

Брізер

$$\operatorname{tg}\frac{u}{4} = \frac{\operatorname{sh}(vt/\sqrt{1-v^2})}{v\operatorname{ch}(x/\sqrt{1-v^2})}, \qquad v = \frac{i\omega}{\sqrt{1-\omega^2}}, \quad \omega < 1$$

$$\operatorname{tg}\frac{u}{4} = \frac{\sqrt{1-\omega^2}}{\omega}\frac{\operatorname{sh}(\omega(t-v_e x)/\sqrt{1-v_e^2})}{\operatorname{ch}(\sqrt{1-\omega^2}(x-v_e t)/\sqrt{1-v_e^2})}$$

Стаціонарний брізер: $v_e = 0$



Рухомий брізер: $v_e > 0$

